Zadanie 43. Wykaż, że prawdziwa jest nierówność:

$$\sqrt{2^{50}+1}+\sqrt{2^{50}-1}<2^{26}.$$

Najbardziej naturalne rozwiązanie zadania polega na przekształcaniu dowodzonej nierówności w sposób równoważny. Przypomnijmy zatem, że dwie nierówności nazywamy **równoważnymi**, jeśli obie są prawdziwe lub obie fałszywe. Przypomnijmy także (bez dowodu), w jaki sposób można przekształcić nierówność, by otrzymać nierówność równoważną. Otóż możemy:

- wykonać działania po obu stronach nierówności (na przykład dokonać redukcji wyrazów podobnych),
- do obu stron nierówności dodać tę samą liczbę,
- od obu stron nierówności odjąć tę samą liczbę,
- obie strony nierówności pomnożyć przez tę samą liczbę dodatnią,
- obie strony nierówności podzielić przez tę samą liczbę dodatnią,
- obie strony nierówności pomnożyć przez tę samą liczbę ujemną, zmieniając kierunek nierówności na przeciwny (tzn. $<$ na $>$, $\leq$ na $\geq$, $>$ na $<$, $\geq$ na $\leq$),
- obie strony nierówności podzielić przez tę samą liczbę ujemną, zmieniając kierunek nierówności na przeciwny (tzn. $<$ na $>$, $\leq$ na $\geq$, $>$ na $<$, $\geq$ na $\leq$),
- obie strony nierówności podnieść do tej samej potęgi nieparzystej,
- obie strony nierówności podnieść do tej samej potęgi parzystej, o ile obie strony były liczbami dodatnimi.

Jeżeli przekształcanie nierówności w sposób równoważny (a więc z zachowaniem powyższych reguł) doprowadzi do nierówności prawdziwej, to dowodzona nierówność także jest prawdziwa. Zastosujemy tę metodę do udowodnienia naszej nierówności.

Rozwiązanie. Ponieważ obie strony nierówności są dodatnie, więc możemy podnieść je do kwadratu:

$$(2^{50}+1)+2\cdot\sqrt{2^{50}+1}\cdot\sqrt{2^{50}-1}+(2^{50}-1)<2^{52}.$$

Następnie otrzymujemy:

$$\begin{aligned}2\cdot 2^{50}+2\cdot\sqrt{(2^{50}+1)(2^{50}-1)}&<2^{52},\\ 2^{51}+2\cdot\sqrt{(2^{50})^2-1^2}&<2\cdot 2^{51},\\ 2\cdot\sqrt{2^{100}-1}&<2^{51},\\ \sqrt{2^{100}-1}&<2^{50}.\end{aligned}$$

Obie strony otrzymanej nierówności są dodatnie, więc możemy podnieść je do kwadratu:

$$2^{100}-1<2^{100}.$$

Otrzymana nierówność jest oczywiście prawdziwa, a więc dowodzona nierówność jest także prawdziwa. To kończy dowód.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA · IBE entuzjaści edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Dowodzona nierówność jest szczególnym przypadkiem nierówności ogólniejszej. Rozwiążmy następujące zadanie.

Zadanie 43a. Udowodnij, że jeśli x jest liczbą rzeczywistą taką, że $x \geq 1$, to

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}<2x.$$

Rozwiązanie. Będziemy przekształcać dowodzoną nierówność w sposób równoważny. Zaczynamy od podniesienia obu stron do kwadratu (możemy to zrobić, gdyż obie strony są dodatnie):

$$(x^2+1)+2\cdot\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{x^2-1}+(x^2-1)<4x^2.$$

Następnie otrzymujemy:

$$2x^2+2\cdot\sqrt{(x^2+1)(x^2-1)}<4x^2,$$
$$2\cdot\sqrt{x^4-1^2}<2x^2,$$
$$\sqrt{x^4-1}<x^2.$$

Obie strony otrzymanej nierówności są dodatnie, więc możemy podnieść je do kwadratu:

$$x^4-1<x^4.$$

Otrzymana nierówność jest oczywiście prawdziwa, a więc dowodzona nierówność jest także prawdziwa. To kończy dowód.

Oczywiście zadanie 43 otrzymujemy z zadania 43a przez podstawienie $x=2^{50}$. Ponieważ w zadaniu 43a liczba x jest dodatnia, więc możemy obie strony nierówności podzielić przez x. Otrzymamy nierówność

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}<2.$$

W tej nierówności mamy oczywiście $0<\frac{1}{x^2}\leq 1$. Okazuje się, że można udowodnić nierówność ogólniejszą.

Zadanie 43b. Udowodnij, że jeśli x jest liczbą rzeczywistą taką, że $0<|x|\leq 1$, to

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}<2.$$

Rozwiązanie. Jeszcze raz przekształcamy nierówność w sposób równoważny. Zaczynamy od podniesienia obu stron do kwadratu (znów możemy to zrobić, gdyż obie strony są dodatnie):

$$(1+x)+2\cdot\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}+(1-x)<4.$$

Następnie otrzymujemy:

$$2+2\cdot\sqrt{(1+x)(1-x)}<4,$$
$$2\cdot\sqrt{1-x^2}<2,$$
$$\sqrt{1-x^2}<1.$$

Obie strony otrzymanej nierówności są dodatnie, więc możemy podnieść je do kwadratu:

$$1 - x^2 < 1.$$

Otrzymana nierówność jest oczywiście prawdziwa, a więc dowodzona nierówność jest także prawdziwa. To kończy dowód.

Nierówność z zadania 43b można udowodnić także w inny sposób. Mamy bowiem następujące zadanie.

Zadanie 43c. Udowodnij, że jeśli x jest liczbą rzeczywistą taką, że $0 < |x| \leq 1$, to

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}.$$

Rozwiązanie. Tę nierówność także przekształcamy w sposób równoważny. Zaczynamy od podniesienia obu stron do kwadratu (znów możemy to zrobić, gdyż obie strony są dodatnie):

$$1 + x < 1 + 2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4},$$

czyli

$$1 + x < 1 + x + \frac{x^2}{4}.$$

Otrzymana nierówność jest oczywiście prawdziwa (gdyż $x \neq 0$), a więc dowodzona nierówność jest także prawdziwa. To kończy dowód.

Rozwiązanie zadania 43b. Sposób II. Zauważmy, że jeśli $0 < |x| \leq 1$, to także $0 < |-x| \leq 1$. Z zadania 43c wynika teraz, że

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{1+(-x)} < 1 + \frac{-x}{2} = 1 - \frac{x}{2}.$$

Zatem mamy dwie nierówności:

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \quad \text{oraz} \quad \sqrt{1-x} < 1 - \frac{x}{2}.$$

Po dodaniu obu nierówności stronami otrzymamy dowodzoną nierówność.